

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.2. Кинематика.

Кинематика – это часть теоретической механики, в которой изучается механическое движение материальных точек и твердых тел.

Механическое движение – это перемещение точек и тел в пространстве.

Кинематику подразделяют на два раздела – кинематику точки и кинематику тела.

Всякое механическое движение происходит в пространстве и во времени. При обычных скоростях можно считать пространство и время абсолютными категориями, которые не зависят от характера движения.

В кинематике используют следующие понятия.

Отрезком или *промежутком времени* называют время, протекающее между двумя фиксированными событиями.

Начальным моментом называют время, с которого начинается отсчет.

Под *данном моментом времени* подразумевают границу между двумя смежными промежутками времени.

Чтобы определить положение точки в пространстве, нужно иметь какое-то неподвижное тело или связанную с ним систему координатных осей, которую называют *системой отсчета*.

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами. Эти координаты изменяются при переходе точки в другое положение.

Траектория – это кривая, которую описывает точка при своем движении в пространстве относительно выбранной системы отсчета.

Расстояние S – это длина участка траектории, отсчитанная от некоторого начала отсчета. Расстояние – величина алгебраическая. Она может быть положительной и отрицательной.

Путь S_n – это количество метров, пройденных точкой от начального до конечного момента времени. Путь всегда положителен.

Уравнения, определяющие положение движущейся точки в зависимости от времени, называются *уравнениями движения*.

Движение точки может быть задано двумя способами:

1. *Естественный или геометрический способ.*

При этом способе задаются траектория движения точки (графически или аналитически), закон движения точки по траектории $S = f(t)$ и начало отсчета на траектории.

2. *Координатный или аналитический способ.*

Положение движущейся в плоскости точки можно определить, если известны ее координаты x и y относительно системы двух взаимно перпендикулярных осей X и Y .

Координаты x и y являются функциями времени. Уравнения движения точки в прямоугольных координатах запишутся в виде

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (1.9)$$

Для того чтобы найти уравнение траектории движения точки, из уравнений (1.9) исключают время t и находят зависимость $y = f(x)$.

Скорость точки

Скоростью называется величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данный момент времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то ее движение называется *равномерным*.

Скорость равномерного движения определяется по формуле

$$v = \frac{S}{t}. \quad (1.10)$$

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные отрезки пути, то ее движение называется *неравномерным*.

Скорость неравномерного движения определяется по формуле

$$v = \frac{dS}{dt}. \quad (1.11)$$

При координатном способе задания движения точки скорость определяется через проекции на координатные оси.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.12)$$

От координатного способа можно перейти к естественному. Интегрируя дифференциальное уравнение (1.11), получаем естественное уравнение движения

$$S = f(t) + S_0, \quad (1.13)$$

где S_0 – это постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение точки на ее траектории.

Ускорение точки

Ускорение – это величина, характеризующая изменение скорости в единицу времени.

Ускорение точки в любой момент времени равно сумме двух векторов:

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n, \quad (1.14)$$

где a_t – это *касательное ускорение*, всегда направлено по касательной к траектории; a_n – *нормальное ускорение*, определяет изменение направления скорости, всегда положительно и направлено по радиусу к центру кривизны.

Касательное ускорение характеризует изменение величины скорости.

Оно лежит на одной прямой со скоростью и определяется по формуле

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (1.15)$$

Если вектора скорости и касательного ускорения направлены в одну сторону, то движение точки называется *ускоренным*.

Если вектора скорости и касательного ускорения направлены в противоположные стороны, то движение точки называется *замедленным*.

Нормальное ускорение возникает только на криволинейных участках траектории и определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.16)$$

где ρ – это радиус кривизны траектории.

При координатном способе полное ускорение можно определить через проекции на координатные оси:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.17)$$

Направление вектора \bar{a} можно определить по формуле

$$\cos \alpha = \cos \angle(\bar{a}, x) = \frac{a_x}{a}. \quad (1.18)$$

Виды движения точки в зависимости от ускорения

1. Равномерное прямолинейное движение точки.

При этом движении скорость $v = \text{const}$, а радиус кривизны траектории $\rho = \infty$. Тогда касательное ускорение $a_t = 0$ и нормальное ускорение $a_n = 0$, следовательно, и полное ускорение точки $a = 0$.

2. Равномерное криволинейное движение. При этом движении $a_t = 0$, т. к. $v = \text{const}$; $a_n \neq 0$, т. к. радиус кривизны траектории ρ является величиной конечной. Следовательно, полное ускорение точки $a = a_n$.

3. Неравномерное прямолинейное движение. При этом движении $a_t \neq 0$, т. к. $v = f(t)$; $a_n = 0$, т. к. радиус кривизны траектории $\rho = \infty$. Следовательно, полное ускорение точки $a = a_t$.

4. Неравномерное криволинейное движение. При этом движении $a_t \neq 0$, т. к. $v = f(t)$; $a_n \neq 0$, т. к. радиус кривизны траектории $\rho \neq \infty$. Следовательно, полное ускорение точки $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$.

Равномерно-переменное движение точки

Когда величина касательного ускорения постоянна, движение точки называется *равномерно-переменным*.

Если абсолютная величина скорости увеличивается, то такое движение называется *равноускоренным*.

Если абсолютная величина скорости уменьшается, то такое движение называется *равнозамедленным*.

Скорость при равномерно-переменном движении определяется по формуле

$$v = a_t t + v_0, \quad (1.19)$$

где v_0 – постоянная интегрирования, характеризующая начальную скорость точки.

Касательное ускорение при равномерно-переменном движении определяется по формуле

$$a_t = \frac{v - v_0}{t}. \quad (1.20)$$

Путь от начала отсчета при равномерно-переменном движении определяется по формуле

$$S = \frac{a t^2}{2} + v_0 t + S_0, \quad (1.21)$$

где S_0 – постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение точки.

Через скорости путь определяется по формуле

$$S = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (1.22)$$

Простейшие движения твердого тела

К простейшим движениям тела относятся *поступательное* и *вращательное* движения.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной своему начальному положению. Поэтому поступательное движение тела можно характеризовать движением одной точки.

Однако поступательное движение может совершать только твердое тело, а не отдельная точка.

Вращательным движением или вращением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела описывают вокруг неподвижной оси окружности.

Закон вращательного движения запишется формулой

$$\varphi = f(t), \quad (1.23)$$

где φ – это угол поворота.

Угловая скорость вращательного движения тела равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.24)$$

Когда $\omega = \text{const}$, то имеет место *равномерное вращение*. Уравнение равномерного вращения имеет вид

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (1.25)$$

где φ_0 – постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение тела.

Когда $\omega \neq \text{const}$, имеет место *неравномерное вращение*.

Изменение угловой скорости в единицу времени определяется угловым ускорением ε , которое определяется как вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.26)$$

Если тело вращается вокруг оси с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = \text{const}$, то происходит равнопеременное вращение.

Уравнения равнопеременного вращения аналогичны уравнениям равнопеременного движения.

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0; \quad (1.27)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.28)$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется траекторией движения точки?
2. Что называется расстоянием S ?
3. Что называется пройденным путем S ?
4. Что называется скоростью точки?
5. Как направлен вектор скорости?
6. По какой формуле определяется скорость равномерного движения?
7. По какой формуле определяется скорость неравномерного движения?
8. Как определяется скорость при координатном способе задания движения точки?
9. Из каких составляющих состоит полное ускорение точки?
10. Что называется касательным ускорением a_t точки?
11. На каких участках возникает касательное ускорение и как направлен вектор касательного ускорения?
12. Что называется нормальным ускорением a_n точки?
13. На каких участках возникает нормальное ускорение и как направлен вектор нормального ускорения?
14. Какое движение называется ускоренным, а какое замедленным?
15. Какое движение называется равномерным прямолинейным?
16. Какое движение называется равномерным криволинейным?
17. Какое движение называется неравномерным прямолинейным?
18. Какое движение называется неравномерным криволинейным?
19. Какое движение называется равномерно-переменным?
20. Какие виды простейших движений твердого тела вы знаете?
21. Что называется поступательным движением?
22. Что называется вращательным движением?