# 3. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## 3.3. Расчеты на прочность при изгибе и кручении

### 3.3.1. Изгиб прямых брусьев

*Плоским поперечным изгибом* называют вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора – поперечная сила $Q$ и изгибающий момент $M$. Если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент, то такой изгиб называется *чистым*. Брус с прямолинейной осью, испытывающий изгиб, называется *балкой*.

Используя метод сечений, рассечем балку плоскостью и отбросим одну часть балки. Действие отброшенной части на оставшуюся заменим двумя силовыми факторами – поперечной силой $Q$ и изгибающим моментом $M$. Эпюра изгибающих моментов строится на сжатом волокне.

Поперечная сила $Q$ в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, на поперечную ось балки.

Изгибающий момент $M$ в произвольном сечении балки численно равен

алгебраической сумме моментов от внешних сил, приложенных по одну

сторону от сечения относительно его центра тяжести.

*Правила знаков*

1. Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент по часовой стрелке (рис. 3.12, *а*).

2. Изгибающий момент считается положительным, если элемент бруса изгибается выпуклостью вниз (рис. 3.12, *б*).

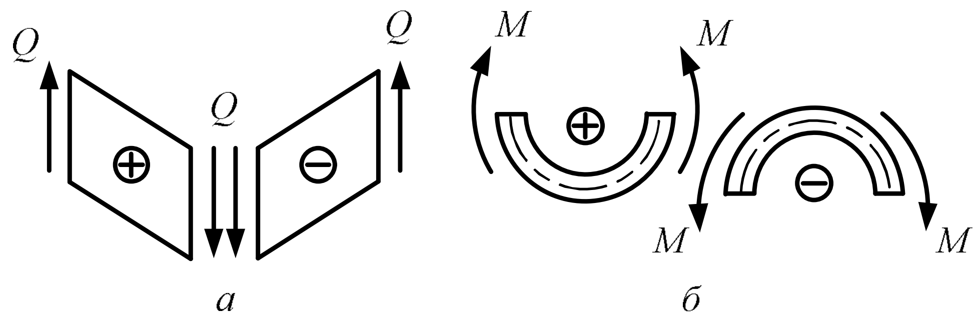


**Рис. 3.12**

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, которые используют для контроля правильности построения эпюр $M$ и $Q$.

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q. \tag{3.22}$$

1. Если на участке отсутствует распределенная нагрузка, то поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

2. Если на участке поперечная сила $Q > 0$, то изгибающий момент возрастает. Если $Q < 0$, то изгибающий момент убывает.

3. Если на участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то поперечная сила меняется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы. При этом парабола всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке.

4. Если сила $Q$ на участке меняет знак с плюса на минус, то в сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент достигает максимального значения. Если сила $Q$ на участке меняет знак с минуса на плюс, то в сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент достигает минимального значения.

5. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, перпендикулярная к оси элемента, эпюра $Q$ имеет скачок, направленный в сторону внешней силы и равный по модулю этой силе, а эпюра $M$ – излом (смежные участки эпюры не имеют плавного сопряжения).

6. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, эпюра $M$ имеет скачок на величину этого момента.

При прямом поперечном изгибе прямого бруса в его поперечных сечениях возникают нормальные $\sigma$ и касательные $\tau$ напряжения (рис. 3.13).

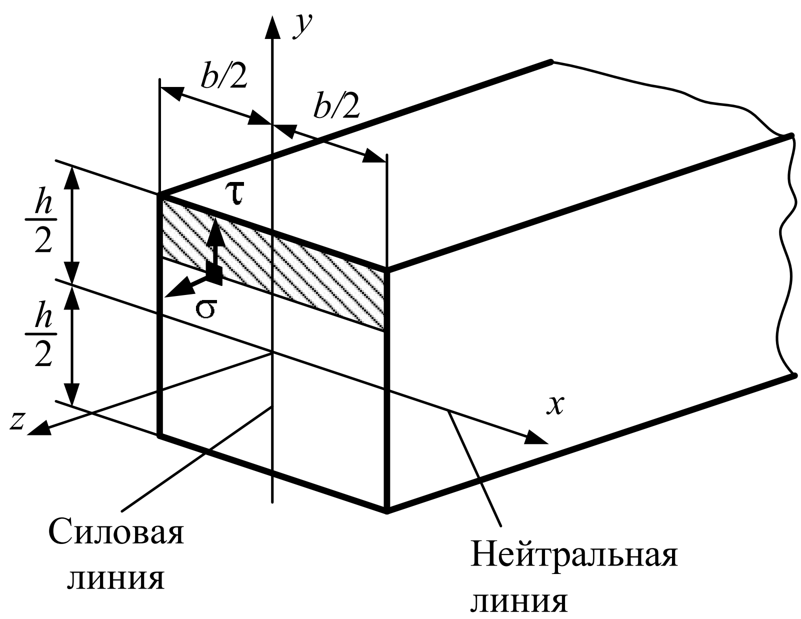


Рис. 3.13

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M_y\, y}{I_x}, \tag{3.23}$$

где $M_y$ – изгибающий момент в рассматриваемом сечении; $y$ – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой вычисляется напряжение; $I_x$ – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Нормальные напряжения по высоте сечения изменяются по линейному закону и достигают наибольших значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x}\, y_{\max}\,. \tag{3.24}$$

Отношение $\dfrac{I_x}{y_{\max}} = W_x$ называется *моментом сопротивления при изгибе*.

Моменты сопротивления простейших сечений вычисляют по следующим формулам:

прямоугольник –

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \tag{3.25}$$

круг –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3; \tag{3.26}$$

кольцо –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0{,}1 d^3 (1 - \alpha^4), \tag{3.27}$$

где $\alpha = \dfrac{d_0}{d}$; $d_0$, $d$ – внутренний и наружный диаметры кольца.

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, следует принимать сечения, симметричные относительно нейтральной оси. Из этих сечений наиболее рациональным является двутавровое.

Для балок из хрупких материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, предпочтительны сечения, несимметричные относительно нейтральной оси. Их следует располагать так, чтобы большая часть сечения находилась в растянутой зоне.

При сечениях, симметричных относительно нейтральной оси, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \le [\sigma]. \tag{3.28}$$

Касательные напряжения в любой точке поперечного сечения определяют по формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{*}}{I_x b}, \tag{3.29}$$

где $Q_y$ – поперечная сила в рассматриваемом сечении; $S_x^*$ – статический момент отсеченной части площади сечения относительно нейтральной оси; $I_x$ – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси; $b$ – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} \le [\tau]. \tag{3.30}$$

Для стальных балок по одной из теорий прочности принимают

$$\tau = 0{,}6[\sigma]. \tag{3.31}$$

При прямом поперечном изгибе бруса его ось, искривляясь, остается в силовой плоскости, ее называют *упругой линией*.

В результате деформации центры тяжести сечений получают вертикальное $y$ и горизонтальное $x$ линейные перемещения, а само сечение поворачивается на некоторый угол θ вокруг своей нейтральной оси (рис. 3.14).

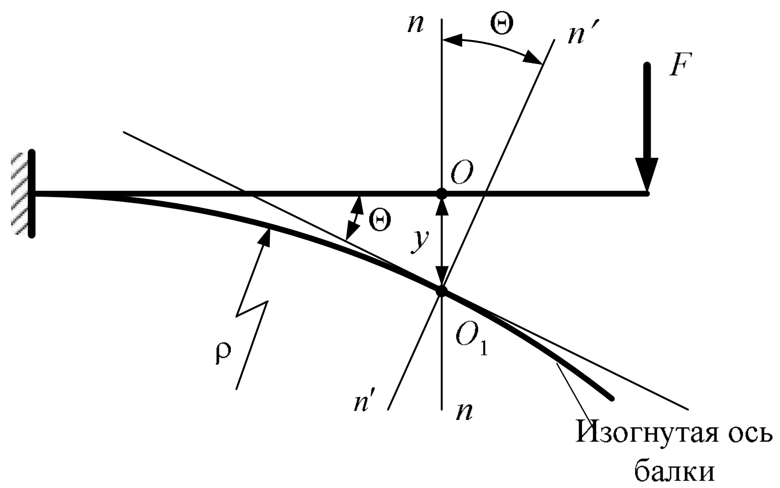


Рис. 3.14

При изучаемых в курсе сопротивления материалов малых деформациях горизонтальные перемещения ничтожно малы и их не учитывают.

Для вычисления прогибов и углов поворота используют приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EI_x y'' = M(z), \tag{3.32}$$

где $EI_x = \text{const}$ – жесткость балки; $M(z)$ – выражение изгибающего момента в данном сечении балки.

Интегрируя это уравнение дважды, получаем уравнения углов поворота и прогибов:

$$\begin{gathered} EI_x y'' = M(z); \\ EI_x y' = \int M(z)\,dz + C\,; \\ EI_x y = \int dz \int M(z)\,dz + C\,z + D\,, \end{gathered} \tag{3.33}$$

где $C$ и $D$ – произвольные постоянные интегрирования.

Произвольные постоянные интегрирования определяют из граничных условий. Они представляют собой угол поворота и прогиб сечения в начале координат, увеличенные в $EI$ раз.

$$C = EI_x \theta_0; \quad D = EI_x y_0. \tag{3.34}$$

Для того чтобы свести число постоянных интегрирования к двум, применяют специальные приемы:

1) начало координат выбирают на левом конце балки независимо от того, что там расположено;

2) координату $z$ откладывают от начала координат до последнего участка балки;

3) слагаемое от сосредоточенного момента $M$ в выражении $M(z)$ записывают в виде $M(z - a)^0$, где $a$ – абсцисса сечения, в котором приложен момент;

4) если балка нагружена распределенной нагрузкой, не доходящей до правого конца балки, то ее продляют до конца балки и прикладывают противоположно направленную нагрузку той же интенсивности;

5) интегрирование выполняют без раскрытия скобок.

Проверку балок на жесткость выполняют по следующим условиям:

$$y_{\max} = [y]; \quad \theta_{\max} = [\theta], \tag{3.35}$$

где $[y]$ и $[\theta]$ – допускаемые значения деформаций.

### 3.3.2. Кручение

*Кручением* называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_z$, представляющий собой результирующий момент внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении.

$$M_z = \int_A \tau \rho \, dA, \tag{3.36}$$

где $\tau$ – касательное напряжение; $\rho$ – радиус кривизны.

Брус круглого поперечного сечения, нагруженный крутящими моментами, обычно называют *валом*. Участки вала между сечениями, к которым приложены внешние моменты, скручиваются. Крутящий момент в любом сечении вала определяют методом сечений. Рассекая мысленно вал плоскостью, отбрасывают одну (любую) часть вала и заменяют действие отброшенной части моментом $M_z$.

*Крутящий момент в сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов T, приложенных по одну сторону от сечения.*

**Правило знаков**.

Внешний крутящий момент $T$ считается положительным, если при взгляде со стороны сечения он направлен против хода часовой стрелки.

Для определения опасного сечения вала строят эпюру крутящего момента $M_z$ в выбранном масштабе.

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяют по формуле

$$\tau = \frac{M_z \rho}{I_p}, \tag{3.37}$$

где $I_p$ – полярный момент инерции.

Эпюра касательного напряжения приведена на рис. 3.14. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках внешнего контура, их определяют по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}, \tag{3.38}$$

где $W_p = \dfrac{I_p}{\rho_{\max}}$ – полярный момент сопротивления сечения, а $\rho_{\max} = d/2$.

Геометрические характеристики вычисляют по следующим формулам:

для круга

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3; \tag{3.39}$$

для кольца

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right) \approx 0{,}1 d^4 \left(1 - \alpha^4\right), \tag{3.40}$$

где $\alpha = d_0/d$ – отношение внутреннего диаметра к наружному.

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) \approx 0{,}2\, d^3\left(1-\alpha^4\right). \tag{3.41}$$

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \le [\tau], \tag{3.42}$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение при кручении.

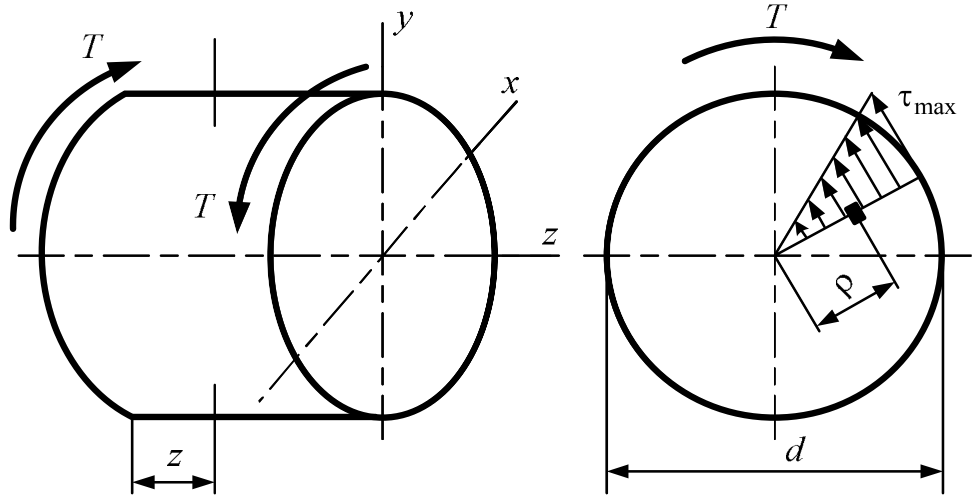


Рис. 3.15

Для расчетов на жесткость и решения статически неопределимых задач необходимо вычисление углов закручивания поперечных сечений φ.

Если крутящий момент и поперечное сечение постоянны в пределах каждого участка бруса, то угол закручивания φ определяется по формуле

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{z_i} l_i}{G I_{p_i}}, \tag{3.43}$$

где $l_i$ – длина $i$-го участка; $G$ – модуль сдвига.

Условие жесткости имеет вид

$$\theta = \frac{M_z}{G\, I_p} \le [\theta], \tag{3.44}$$

где θ – относительный угол закручивания (т. е. угол закручивания на единицу длины); [θ] – допускаемый угол закручивания.