Указания к выполнению контрольной работы № 1

Пример решения задачи № 1

Груз весом G = 60 кН подвешен при помощи каната, перекинутого через блок A и идущего к лебедке D. Определить реакции в стержнях AC и BA крана (рис. 1.8).

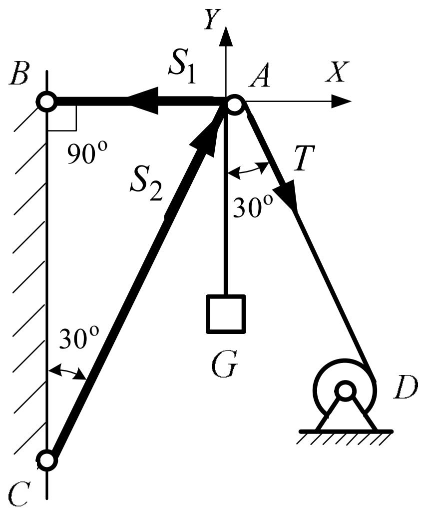

Рис. 1.8

Решение. 1. Реакции стержней AB и AC направлены вдоль стержней. Из анализа нагружения стержней видно, что стержень AB растянут, следовательно, реакция S_1 направлена от точки A к точке B. Стержень AC сжат, следовательно, реакция S_2 направлена от точки C к точке A. Усилие в канате T направлено вдоль каната от точки A к точке D, так как канат растягивается под действием груза G. Очевидно, что $T = G$.

2. Выберем систему осей X и Y так, чтобы одна из реакций (например S_1) была направлена по одной из осей. Для данной системы сходящихся сил можно составить два уравнения равновесия:

$$\sum F_y = 0;\ S_2 \cdot \cos 30^\circ - G - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$S_2 = \frac{G + T\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 129{,}3 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0;\ -S_1 + S_2 \cos 60^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$S_1 = S_2 \cos 60^\circ + T\cos 60^\circ = 94{,}6 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_1 = 94{,}6$ кН; $S_2 = 129{,}3$ кН.

Пример решения задачи № 2

Определить реакции опор: 1) для балки с жесткой заделкой (рис. 1.9, *а*); 2) для двухопорной балки (рис. 1.9, *б*); 3) для двухопорной рамы (рис. 1.9, *в*).

Дано: $F_1 = 20$ кН; $F_2 = 40$ кН; $M = 30$ кНм; $q = 10$ кН/м;
$l_1 = 2$ м; $l_2 = 4$ м; $l_3 = 4$ м.

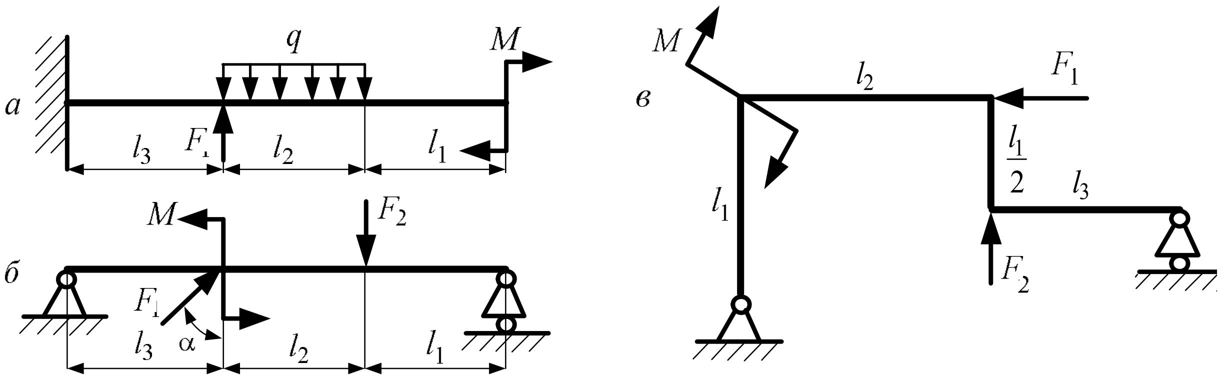

Рис. 1.9

Решение. 1. В жесткой заделке возникают три опорные реакции – вертикальная составляющая R_A, горизонтальная составляющая H_A и опорный момент M_A (рис. 1.10).

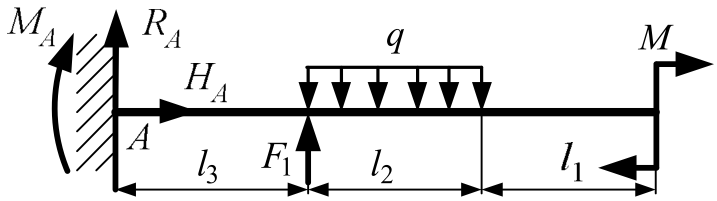

Рис. 1.10

Для определения опорных реакций жесткой заделки рационально использовать первую форму условий равновесия плоской произвольной системы сил.

$$\Sigma F_x = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A + F_1 - ql_2 = 0;$$

$$R_A = -F_1 + q \cdot 4 = -20 + 10 \cdot 4 = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A = 0; \;\; -M_A + Fl_3 - ql_2\left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) - M = 0;$$

$$M_A = F \cdot 2 - q \cdot 16 - M = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 16 - 30 = -150 \text{ кНм}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение $\Sigma m_B = 0,$ которое должно быть равно нулю.

$$\Sigma m_B = 0;\ \ -M_A - R_A(l_1 + l_2 + l_3) - F_1(l_1 + l_2) + ql_2\left(\frac{l_2}{2} + l_1\right) - M =$$

$$= -(-150) - 20 \cdot 10 - 20 \cdot 8 + 10 \cdot 24 - 30 = 0.$$

Опорные реакции определены правильно.

2. В шарнирно-неподвижной опоре возникают две опорные реакции R_A и H_A, а в шарнорно-подвижной опоре – одна опорная реакция R_B (рис. 1.11).

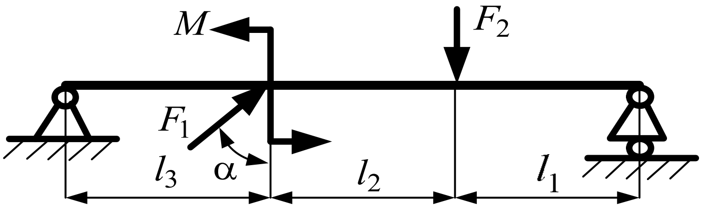

Рис. 1.11

Для определения опорных реакций двухопорной балки рационально использовать вторую форму условий равновесия плоской произвольной системы сил.

$$\Sigma F_x = 0; \quad H_A + F_1 \sin\alpha = 0;$$

$$H_A = -F_1 \sin 30^{\circ} = -20 \cdot 0{,}5 = -10 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A = 0;\ \ F_1 \cos\alpha \cdot l_3 + M - F_2(l_2 + l_3) + R_B(l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$R_B = \frac{-F_1 \cos\alpha \cdot 2 - M + F_2 \cdot 6}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{-20 \cdot 0{,}866 \cdot 2 - 30 + 40 \cdot 6}{10} = 17{,}54 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_B = 0;\ \ F_2 \cdot l_1 + M - F_1 \cos\alpha \cdot (l_1 + l_2) - R_A(l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$R_A = \frac{F_2 \cdot 4 + M - F_1 \cos\alpha \cdot 8}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{40 \cdot 4 + 30 - 20 \cdot 0{,}866 \cdot 8}{10} = 5{,}14 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение $\Sigma F_y = 0,$ которое должно быть равно нулю.

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A + F_1 \cos\alpha - F_2 + R_B = 5{,}14 + 20 \cdot 0{,}866 - 40 + 17{,}54 = 0.$$

Опорные реакции определены правильно.

3. В шарнирно-неподвижной опоре возникают две опорные реакции R_A и H_A, в шарнорно-подвижной опоре – одна опорная реакция R_B (рис. 1.12).

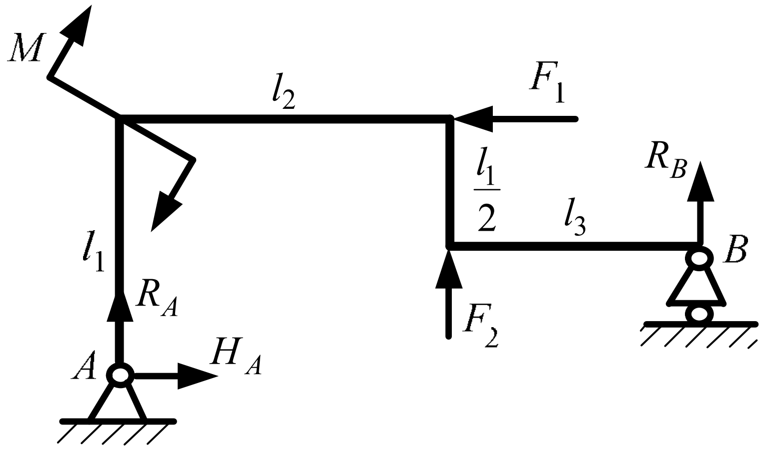

Рис. 1.12

Для определения опорных реакций двухопорной рамы рационально использовать вторую форму условий равновесия плоской произвольной системы сил.

$$\Sigma F_x = 0; \quad H_A - F_1 = 0;$$

$$H_A = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A = 0; \;\; -M + F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + R_B(l_2 + l_3) = 0;$$

$$R_B = \frac{M - F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2}{(l_2 + l_3)} = \frac{30 - 20 \cdot 2 - 40 \cdot 4}{8} = -21{,}25 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_B = 0; \;\; -F_2 \cdot l_3 + F_1 \frac{l_1}{2} - M - R_A(l_2 + l_3) + H_A \cdot \frac{l_1}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{-F_2 \cdot l_3 + F_1 \cdot \frac{l_1}{2} - M + H_A \cdot \frac{l_1}{2}}{(l_2 + l_3)} = \frac{-40 \cdot 4 + 20 \cdot 1 - 30 + 20 \cdot 1}{8} = -18{,}75 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение $\Sigma F_y = 0,$ которое должно быть равно нулю.

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A + F_2 + R_B = -18{,}75 + 40 - 21{,}25 = 0.$$

Опорные реакции определены правильно.

Пример решения задачи № 3

По 1/4 дуге окружности движется точка A из положения 0 в положение 2 (рис. 1.13), согласно уравнению $S = \pi t^2$. Радиус окружности $r = 16$ м. Определить скорость точки v, касательное ускорение a_t, нормальное ускорение a_n и полное ускорение a в положениях 1 и 2.

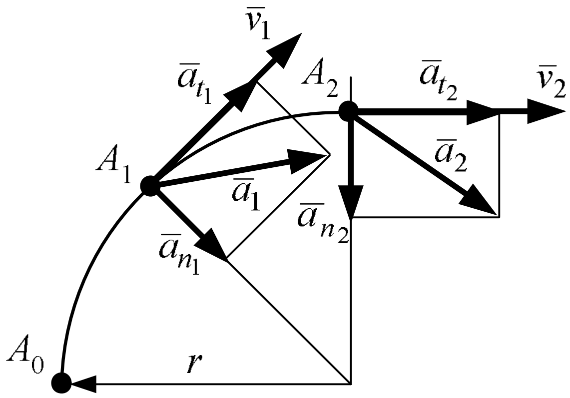

Рис. 1.13

Решение. 1. Определим расстояние S_1, которое проходит точка A от положения 0 до положения 1.

$$S_1 = \frac{2\pi r}{8} = 4\pi.$$

Расстояние, которое проходит точка A от положения 0 до положения 2

$$S_2 = \frac{2\pi r}{4} = 8\pi.$$

2. Определим время, за которое точка достигнет середины дуги, т. е. положения 1.

$$t_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\pi}} = 2 \text{ с}.$$

Время, за которое точка достигнет положения 2,

$$t_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\pi}} = 2{,}8 \text{ с}.$$

3. Определим скорость движения точки A. Для этого продифференцируем уравнение движения $S = \pi t^2$.

$$v = \frac{dS}{dt} = (\pi t^2)' = 2\pi t.$$

Скорость движения точки A в положении 1

$$v_1 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}6 \text{ м/с}.$$

Скорость движения точки A в положении 2

$$v_2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}8 = 17{,}6 \text{ м/с}.$$

4. Определим касательное ускорение точки A в положении 1. Для этого продифференцируем уравнение скорости $v = 2\pi t$.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = (2\pi t)' = 2\pi = 6{,}28 \text{ м/с}^2 = \text{const}.$$

Касательное ускорение не зависит от времени, поэтому касательное ускорение точки A в положении 2 также будет равно 6,28 м/с ^{2}.

5. Определим нормальное ускорение точки A в положении 1:

$$a_{n_1} = \frac{v_1^2}{\rho} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{12{,}6^2}{16} = 9{,}86 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки A в положении 2

$$a_{n_2} = \frac{v_2^2}{\rho} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{17{,}6^2}{16} = 19{,}36 \text{ м/с}^2.$$

6. Определим полное ускорение точки A в положении 1:

$$a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_{n_1}^2} = \sqrt{6{,}28^2 + 9{,}86^2} = 11{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки A в положении 2

$$a_2 = \sqrt{a_t^2 + a_{n_2}^2} = \sqrt{6{,}28^2 + 19{,}36^2} = 20{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Пример решения задачи № 4

Через однородный блок весом G_1 = 10 кН и радиусом r = 0,2 м перекинут трос с двумя грузами: G_2 = 100 кН и G_3 = 30 кН. Груз G_2 опускается по вертикали, груз G_3 поднимается по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α = 45° (рис. 1.14). Пренебрегая массой троса и сопротивлениями в опорах, определить: 1) высоту S, на которую должен опуститься груз G_2, чтобы достичь скорости $v = 3\ \text{м}/\text{с}^2$, если начальная скорость равна нулю; 2) ускорение движения грузов.

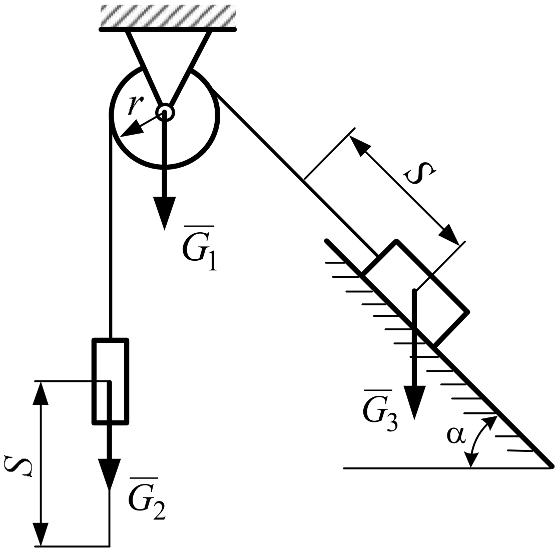

Рис. 1.14

Решение. 1. Скорость движения грузов равна по величине скорости на окружности блока. Следовательно, угловую скорость блока можно определить по формуле

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Запишем закон кинетической энергии для рассматриваемой системы:

$$K_2 - K_1 = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i}\ . \qquad (1.56)$$

Так как начальная скорость равна нулю, то $K_1 = 0$.

$$K_2 = \frac{J_1\omega^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{m_3 v^2}{2}, \qquad (1.57)$$

где J_1 – момент инерции блока, определяется как для однородного цилиндра:

$$J_1 = \frac{G_1}{2g} r^2.$$

Подставим в уравнение (1.57) значения J_1, ω, $m_2 = G_2 / g$ и $m_3 = G_3 / g$.

$$K_2 = \frac{J_1 v^2}{2r^2} + \frac{G_2 v^2}{1g} + \frac{G_3 v^2}{1g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{G_1 r^2}{2r^2} + G_2 + G_3\right).$$

Определим работу заданных сил. Работу совершают только две силы – G_2 и G_3 .

$$\sum_{i=1}^{n} A_{F_i} = G_2 S - G_3 S \sin\alpha = S(G_2 - G_3 \sin\alpha).$$

Подставим в уравнение (1.56) найденные значения кинетической энергии и работы и получим

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right) = S(G_2 - G_3 \sin\alpha). \tag{1.58}$$

Из уравнения (1.58) найдем пройденный путь S:

$$S = \frac{v^2\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right)}{2g(G_2 - G_3 \sin\alpha)} = \frac{3^2 \cdot \left(\frac{10}{2} + 100 + 30\right)}{2 \cdot 9{,}81 \cdot (100 - 30 \cdot 0{,}707)} = 0{,}787 \text{ м}.$$

2. Чтобы вычислить ускорение грузов, продифференцируем уравнение (1.58) по времени, учитывая, что в скобках стоят выражения, не зависящие от времени.

$$\frac{2v \cdot dv}{2g \cdot dt}\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right) = \frac{dS}{dt}(G_2 - G_3 \sin\alpha).$$

Учитывая, что

$$v = \frac{dS}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt},$$

где a – это ускорение грузов G_2 и G_3 . Окончательно находим

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(G_2 - G_3 \sin\alpha)g}{\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3} = \frac{(100 - 30\sin 45^\circ)9{,}81}{\frac{10}{2} + 100 + 30} = 5{,}73 \text{ м/с}^2.$$