Указания к выполнению контрольной работы № 3

Пример решения задачи № 7

Для стального стержня (рис. 3.16) круглого поперечного сечения, находящегося под действием осевых сил F_1 и F_2 и F_3, требуется:

1) построить в масштабе эпюры продольных сил N;

2) из условия прочности определить размеры поперечных сечений стержня;

3) построить эпюры перемещений в масштабе. Собственным весом стержня пренебречь.

Дано:

1) модуль упругости для стали принять равным $E = 2\times10^5$ Н/мм^2;

2) допускаемое напряжение [□□ =160 Н/мм^2;

3) l_1 = 100 мм; l_2 = 300 мм; l_3 = 200 мм;

4) F_1 = 20 *кН*; F_2 = 5 кН; F_3 = 30 кН.

Решение. 1. Построение эпюры продольной силы *N*. Разбиваем стержень на участки. Началом и концом участка являются точки приложения внешних сил и опорных реакций. Для того чтобы не определять опорные реакции из уравнений равновесия, будем рассматривать отсеченные участки со свободного конца (рис. 3.16).

Согласно определению величина продольной силы численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих на оставшуюся часть стержня, на ось стержня.

Участок I, $0 \le z_1 \ge 100$ мм.

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН}.$$

Участок II, $0 \le z_2 \ge 300$ мм.

$$N_2 = F_1 + F_2 = 20 + 5 = 25 \text{ кНм};$$

Участок III, $0 \le z_3 \ge 200$ мм.

$$N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = 20 + 5 - 30 = -5 \text{ кН}.$$

По полученным данным строим эпюру N (рис. 3.17, *а*), предварительно выбрав масштабный коэффициент.

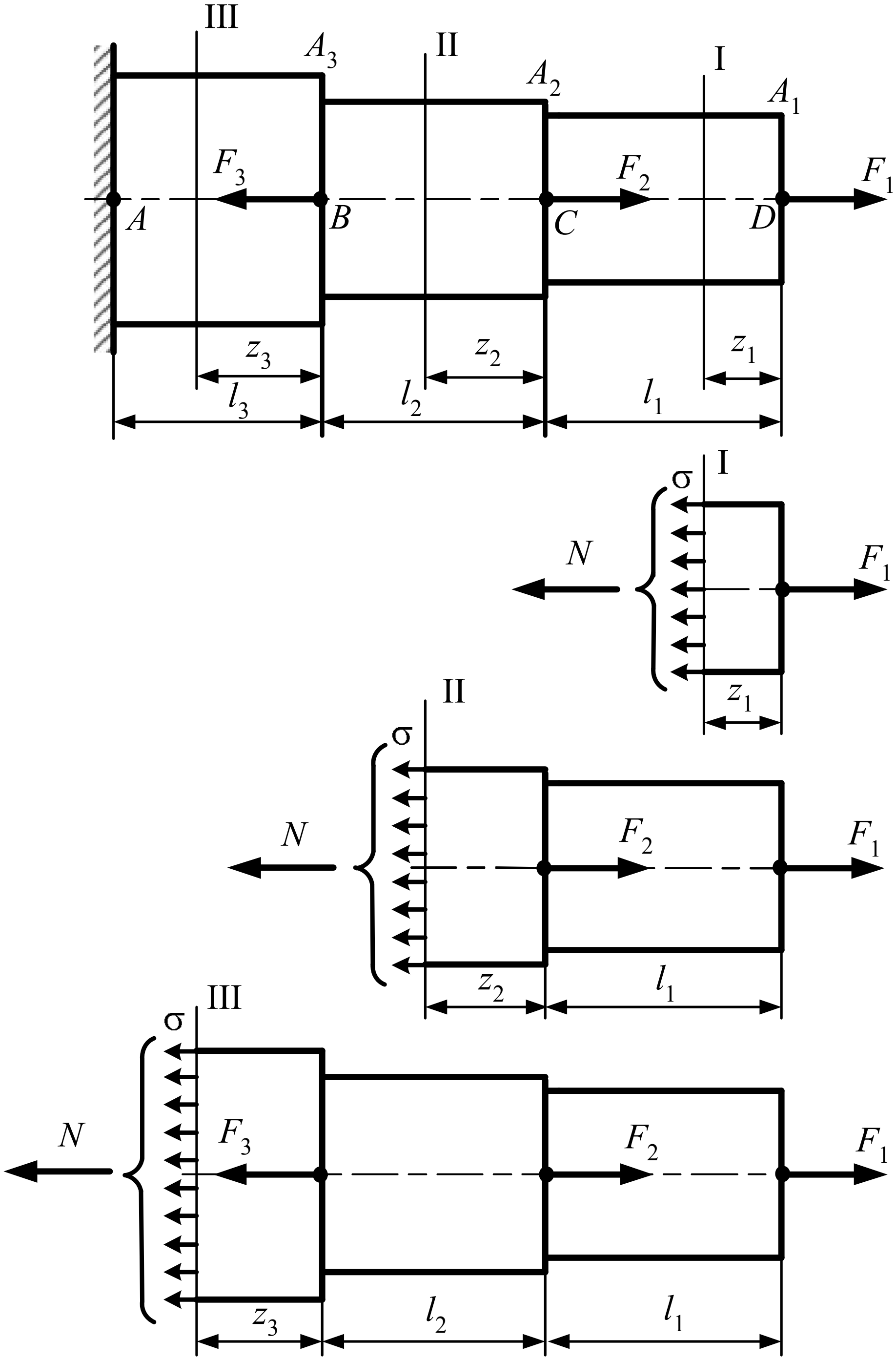

Рис. 3.16

2. Подбор размеров поперечного сечения. Из условия прочности определим площади и размеры поперечных сечений стержня.

Для первого участка

$$\sigma^{I} = \frac{N_1}{A_1} = [\sigma]; \qquad A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{20000}{160} = 125 \text{ мм}^2.$$

Площадь и диаметр круглого поперечного сечения определяем по формуле

$$A_1 = \frac{\pi d_1^{\,2}}{4},$$

отсюда

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\cdot 125}{3{,}14}} = 5{,}42\ \text{мм}.$$

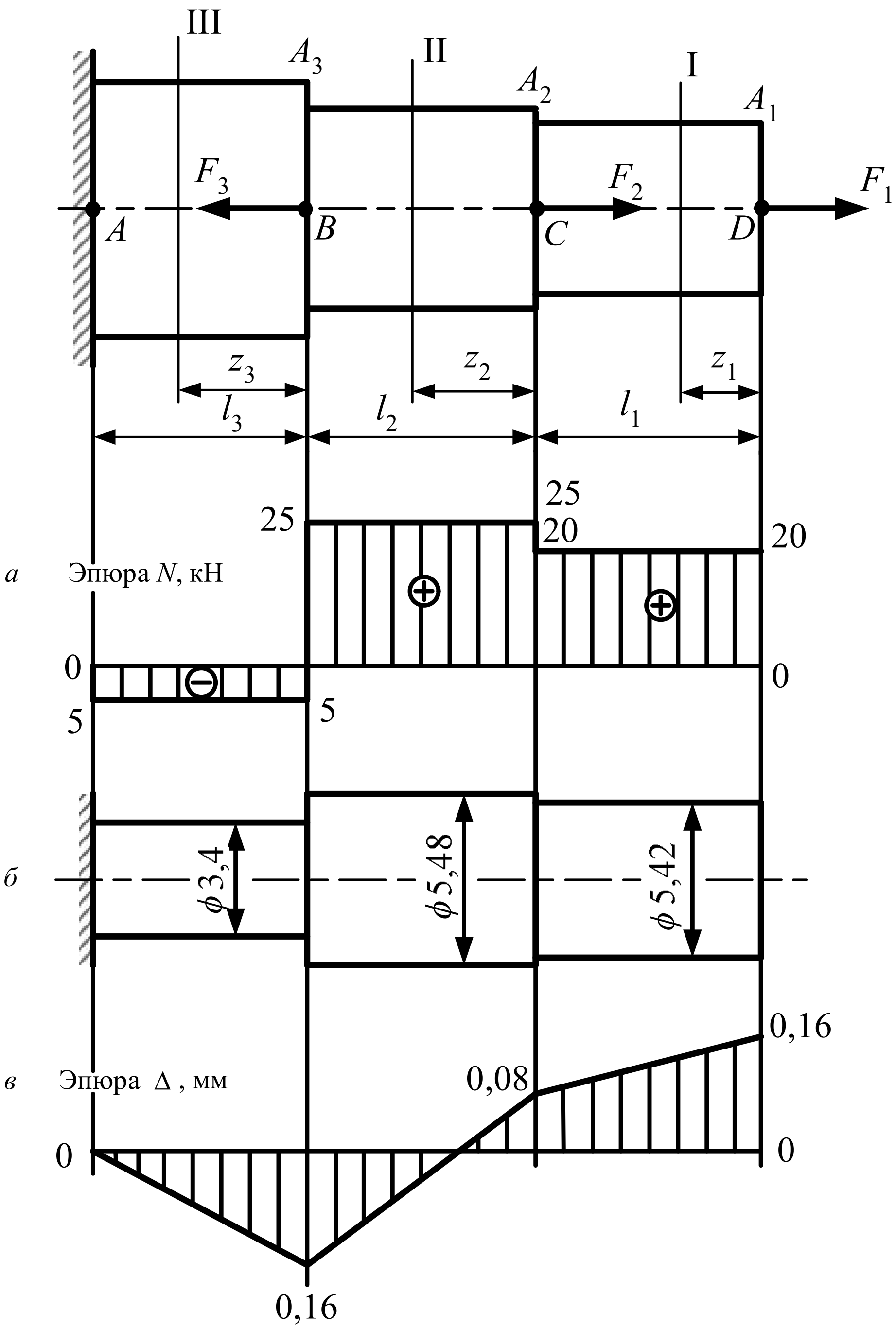

Рис. 3.17

Для второго участка

$$\sigma^{II} = \frac{N_2}{A_2} = [\sigma]; \quad A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{25000}{160} = 156,25\ \text{мм}^2.$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 156,25}{3,14}} = 5,84\ \text{мм}.$$

Для третьего участка

$$\sigma^{III} = \frac{N_3}{A_3} = [\sigma]; \quad A_3 = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{5000}{160} = 31,25\ \text{мм}^2.$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31,25}{3,14}} = 3,4\ \text{мм}.$$

Конструируем стержень (рис. 3.17, *б*).

3. Построение эпюры перемещений. Для построения эпюры перемещений используем формулу закона Гука.

При построении эпюры Δl учтем, что в точке *A* (жесткая заделка) перемещение сечения стержня отсутствует. С этой точки и начинаем отсчитывать ординаты перемещений.

$$\Delta_A = 0;$$

$$\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_{AB} = 0 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{\left(-5 \cdot 10^3\right) \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 31,25} = -0,16\ \text{мм};$$

$$\Delta_C = -0,16 + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -0,16 + \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 156,25} = -0,16 + 0,24 = 0,08\ \text{мм};$$

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_{CD} = 0,08 + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0,08 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 125} = 0,16\ \text{мм}.$$

Строим эпюру перемещений в масштабе (рис. 3.17, *в*).

Проверяем стержень по условию жесткости:

$$\Delta_D \le [\Delta], \tag{2.31}$$

где [Δ] = 0,01 мм, принимается конструктивно.

$$\Delta_D = 0{,}16\,\text{мм} > [\Delta] = 0{,}01\,\text{мм}.$$

Вывод: условие жесткости не выполняется. Для уменьшения деформаций необходимо увеличить размеры поперечных сечений стержня.

Пример решения задачи № 8

Для стального стержня круглого поперечного сечения (рис. 3.18, *а*), находящегося под действием осевой силы F и нагретого до температуры Δt, требуется:

1) построить эпюру продольных сил;
2) построить эпюру напряжений;
3) проверить стержень по условию прочности.

Дано:

1) допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 160 МПа = 160 Н/мм^2;
2) модуль упругости стали $E = 2\ 10^5$ Н/мм^2;
3) коэффициент температурного расширения $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$;
4) F = 80 кН; l_1 = 100 мм; l_2 = 100 мм; l_3 = 200 мм;
5) A_1 = 400 мм^2; A_2 = 600 мм^2; Δt = 100 °С; Δ = 0,01 мм.

Решение. 1. Определяем перемещение сечения «*а–а*» для того, чтобы убедиться, закроется ли зазор Δ:

$$\Delta_{a-a} = \Delta l_F + \Delta l_t, \tag{2.32}$$

где $\Delta l_F = \dfrac{Fl_1}{EA_1}$ – удлинение стержня от действия осевой силы F;

$\Delta l_t = \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3)$ – удлинение от температурного расширения.

Тогда

$$\Delta_{a-a} = \frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3) =$$

$$= \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 400 = 0{,}6 \ \text{мм} > \Delta = 0{,}1 \ \text{мм}.$$

Зазор закрывается, и в точке *Д* возникает опорная реакция $R_Д$.

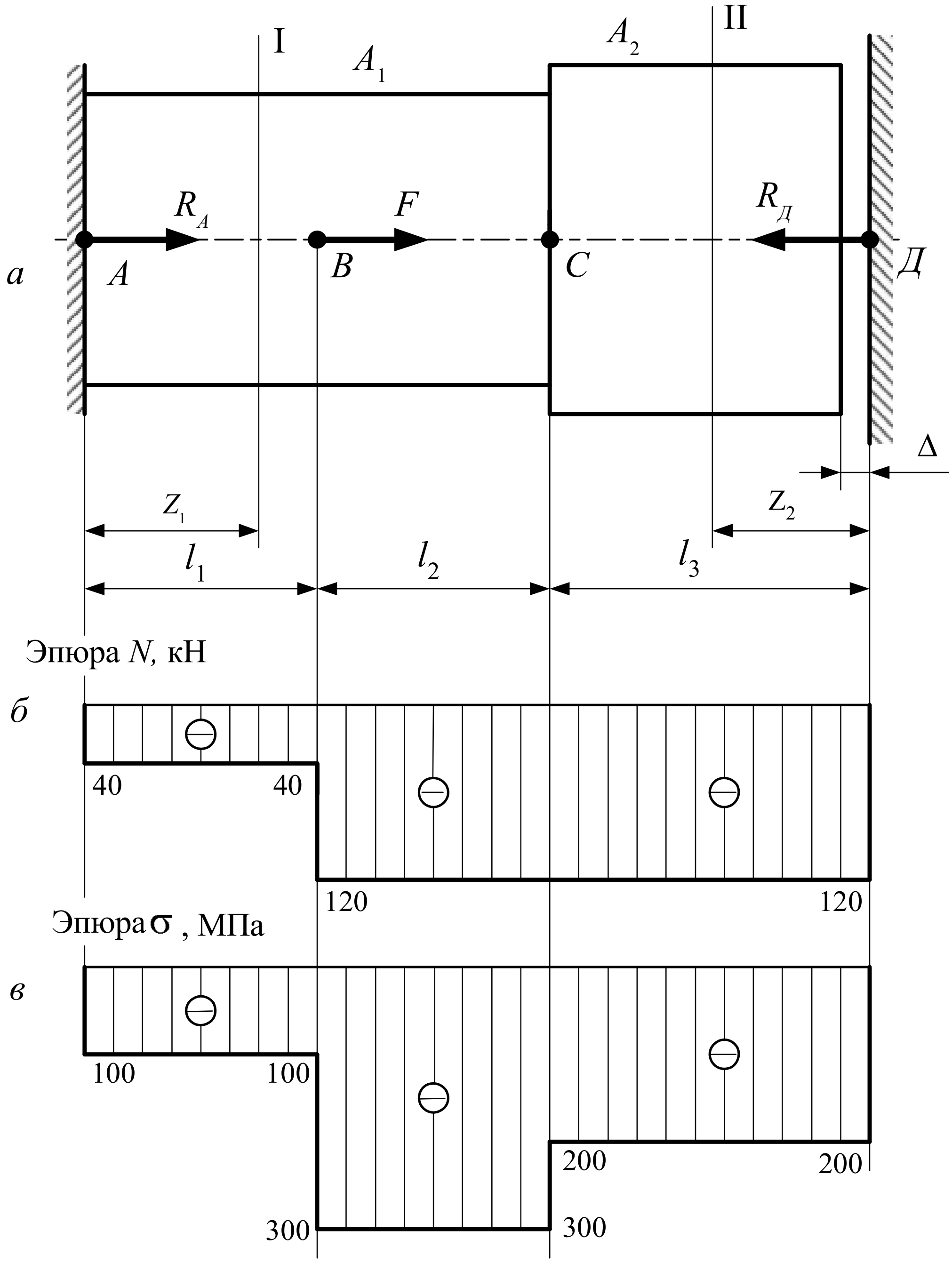

Рис. 3.18

2. Определяем степень статической неопределимости системы по формуле

$$C = S - n = 2 - 1 = 1,$$

где S – число неизвестных усилий; n – число всех возможных уравнений статики.

Система один раз статически неопределима, поэтому кроме уравнения равновесия составляют дополнительное уравнение совместности деформаций

$$\Delta_{a-a} = \Delta;$$

$$\frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha\Delta t(l_1 + l_2 + l_3) - \frac{R_Д(l_1 + l_2)}{EA_2} - \frac{R_Д l_3}{EA_2} = \Delta;$$

$$-\frac{R_Д(l_1 + l_2)}{EA_1} - \frac{R_Д l_3}{EA_2} = \Delta - \left(\frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha\Delta t(l_1 + l_2 + l_3)\right);$$

$$-\frac{200R_Д}{2\cdot10^5\cdot400} - \frac{200R_Д}{2\cdot10^5\cdot600} = 0{,}1 - 0{,}6;$$

$$-\frac{200R_Д}{2\cdot10^5\cdot400} - \frac{200R_Д}{2\cdot10^5\cdot600} = -0{,}5;$$

$$R_Д = 120 \text{ кН}.$$

3. Из уравнения равновесия $\sum F_z = R_A + F - R_Д = 0$ находим

$$R_A = R_Д - F = 120 - 80 = 40 \text{ кН}.$$

4. Определяем продольную силу N.

Участок I, $0 \le z_1 \le (l_1 + l_2)$:

$$N_1 = -R_A = -40 \text{ кН}.$$

Участок II, $0 \le z_2 \le l_3$:

$$N_2 = -R_Д = -120 \text{ кН}.$$

Строим эпюру продольной силы N в выбранном масштабе (рис. 3.18, *б*).

5. Определяем нормальные напряжения σ.

Участок *AB*:

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-40\cdot10^3}{400} = -100 \text{ МПа}.$$

Участок *BC*:

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-120\cdot10^3}{400} = -300 \text{ МПа}.$$

Участок *СД*:

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-120 \cdot 10^3}{600} = -200 \text{МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений σ в масштабе (рис. 3.18, *в*).

6. Проверяем стержень по условию прочности $\sigma_{\max} \le [\sigma]$. Опасным является участок *ВС*, так как

$$\sigma_{\max} = |-300| \text{МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности не выполняется и необходимо увеличить площадь поперечного сечения стержня.

Пример решения задачи № 9

I. Для балки, работающей на изгиб (рис. 3.19, *а*), требуется:

1. построить эпюры внутренних силовых факторов – поперечной силы *Q* и изгибающего момента *M*;
2. подобрать размеры поперечного сечения стальной балки для случаев: двутавровой; прямоугольного поперечного сечения со сторонами *h* – большая, *b* – меньшая (*h/b* = 2); круглого поперечного сечения;
3. вычислить нормальные напряжения в характерных точках сечения;
4. проверить балку двутаврового сечения на прочность по касательным напряжениям.

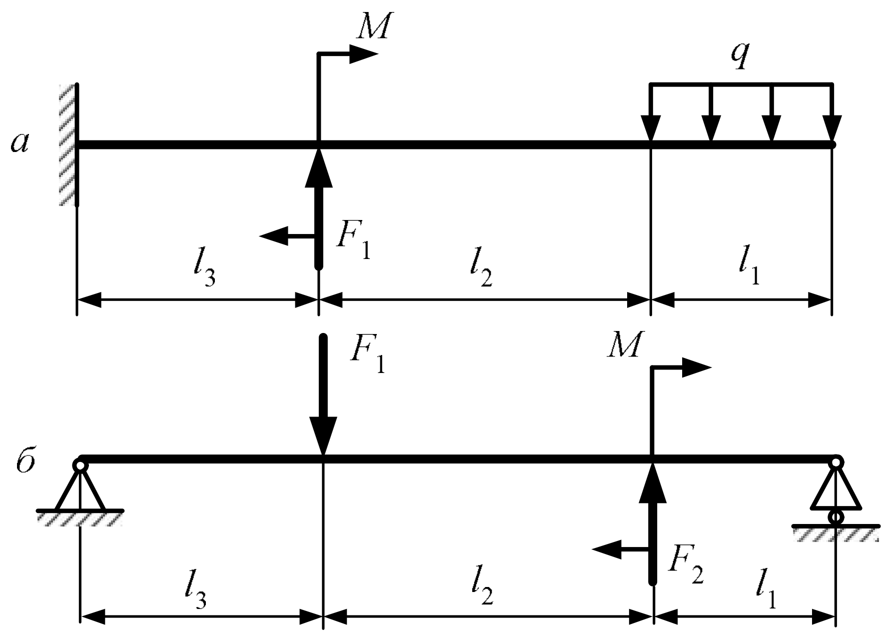

Рис. 3.19

Дано:

1) допускаемые напряжения для стали: [σ] = 180 МПа; [τ] = 110 МПа;
2) F = 40 кН; q = 18 кН/м; M = 20 кНм;
3) l_1 = 0,5 м; l_2 = 1,2 *м;* l_3 =0,*8* м.

Решение. 1. Для балок с жестким защемлением нет необходимости первоначально определять опорные реакции, так как все участки можно рассматривать со свободного конца балки.

Для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M воспользуемся методом сечений (рис. 3.20).

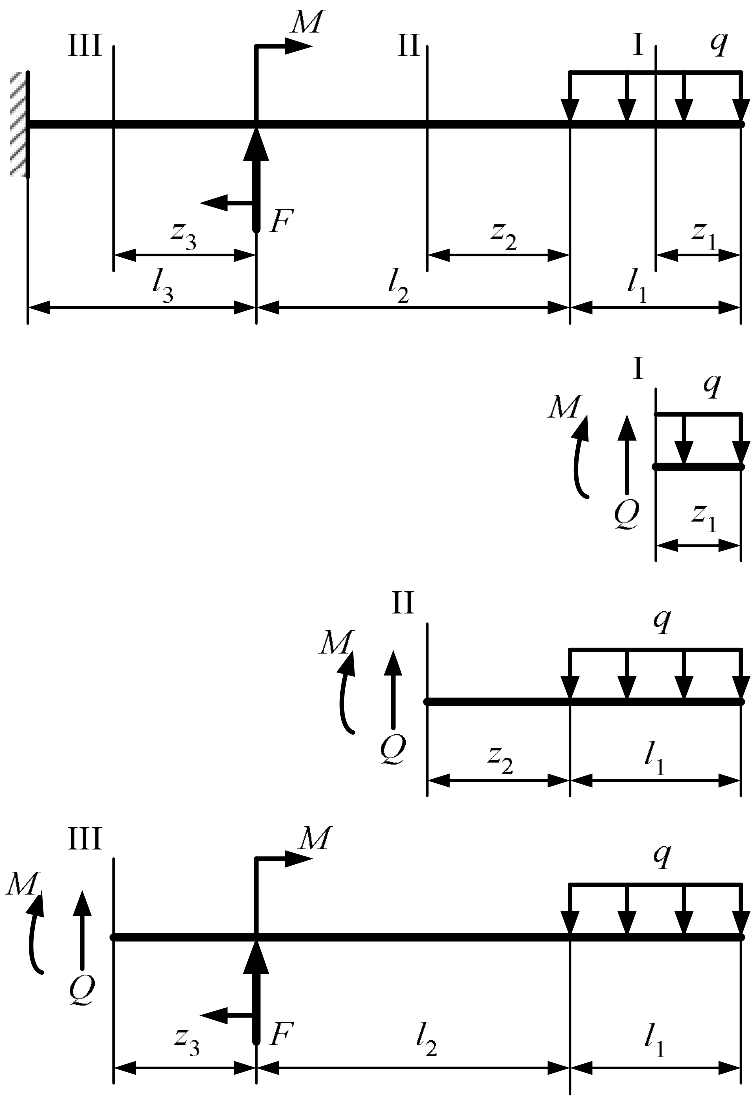

Рис. 3.20

Участок I, $0 \le z_1 \le 0,5$ м:

$$Q = q\,z_1;\quad Q_{z=0} = 0;\quad Q_{z=0,5} = q\cdot 0,5 = 18\cdot 0,5 = 9 \text{ кН};$$

$$M = -q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = -q\frac{z_1^2}{2}; \ \ M_{z=0} = 0;$$

$$M_{z=0,5} = -\frac{q \cdot 0,5^2}{2} = -\frac{18 \cdot 0,5^2}{2} = -2,25 \text{ кНм}.$$

Так как $\frac{d^2 M}{d z^2} < 0,$ то кривая момента расположена выпуклостью вверх.

Участок II, $0 \le z_2 \le 1,2$ м:

$$Q = q \cdot l_1 = 18 \cdot 0,5 = 9 \text{ кН};$$

$$M = -q\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + z_2 \right);$$

$$M_{z=0} = -\frac{q \cdot 0,5^2}{2} = -2,25 \text{ кНм}.$$

$$M_{z=1,2} = q\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + 1,2 \right) = -18 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + 1,2 \right) = -13,05 \text{ кНм}.$$

Участок III, $0 \le z_3 \le 0,8$ м:

$$Q = q\, l_1 - F = 18 \cdot 0,5 - 40 = -31 \text{ кН};$$

$$M = -q\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + z_3 \right) + F\, z_3 - M;$$

$$M_{z=0} = -q\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) - M = -18 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + 1,2 \right) - 20 = -33,05 \text{ кНм};$$

$$M_{z=0,8} = -q\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + 0,8 \right) + F \cdot 0,8 - M =$$

$$= -18 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + 1,2 + 0,8 \right) + 40 \cdot 0,8 - 20 = -8,25 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M в выбранном масштабе (рис. 3.21). Для контроля правильности построения эпюр воспользуемся дифференциальными зависимостями.

2. Подберем размеры поперечного сечения балки различных профилей.

Используя условие прочности при изгибе, определим величину момента сопротивления сечения W_x:

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}; \qquad M_{\max} = |-33{,}05| \text{ кНм};$$

$$W_x = \frac{33{,}05 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}206 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3 = 206\text{ см}^3.$$

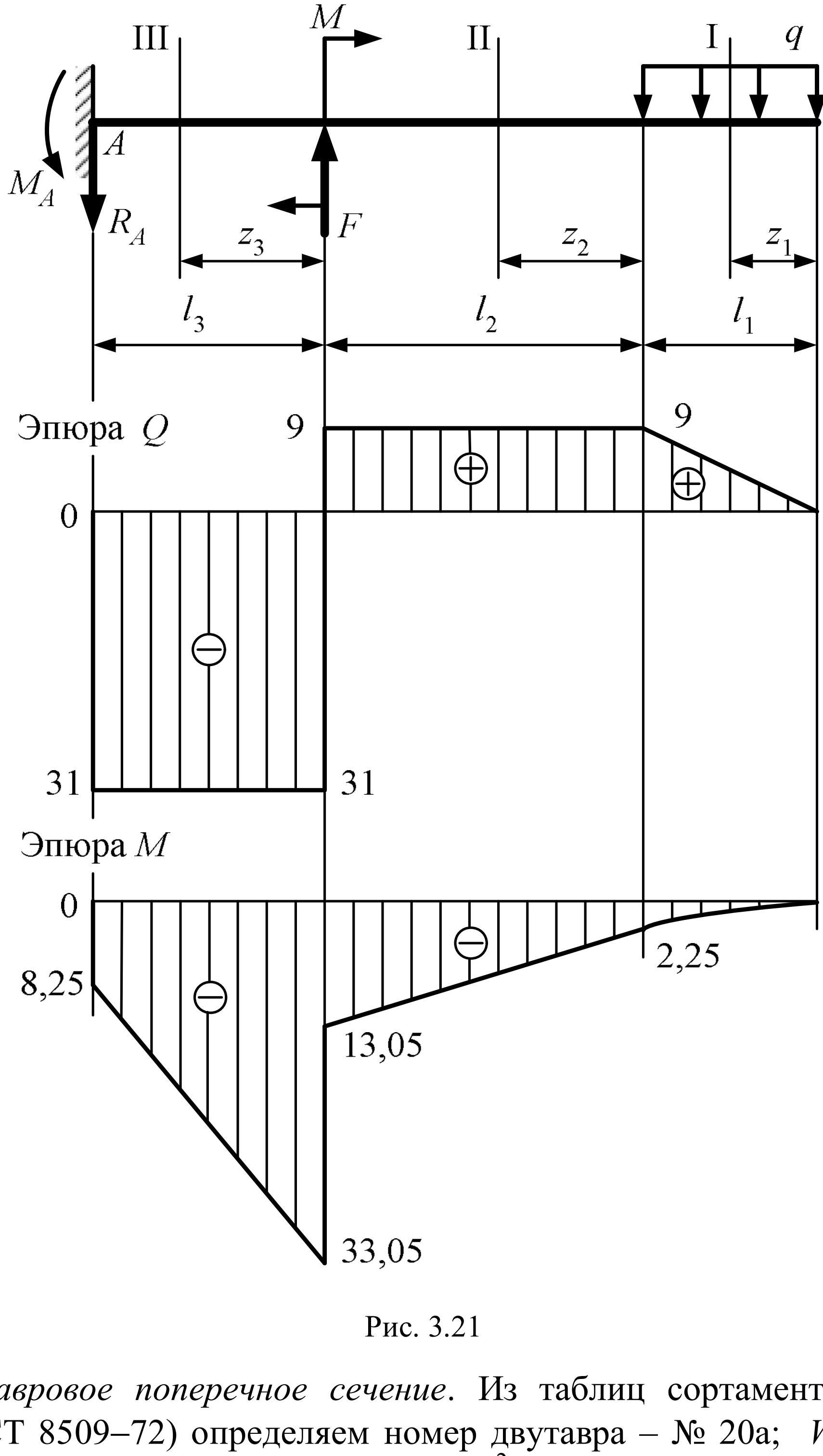

Рис. 3.21

Двутавровое поперечное сечение. Из таблиц сортамента прокатной стали (ГОСТ 8509–72) определяем номер двутавра – № 20а; W_x = 197 см^3; площадь поперечного сечения A = 28,3 см^2.

Так как момент сопротивления принятого двутавра меньше, чем расчетный, то необходимо определить перенапряжение, которое не должно превышать 5 %.

$\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_x} = \dfrac{33{,}05}{197 \cdot 10^{-6}} = 168$ МПа; $\dfrac{168 - 160}{160} \cdot 100\ \% = 5\ \%$, что допустимо.

Прямоугольное поперечное сечение, $h = 2b$:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3};\ \ 206 = \frac{2b^3}{3};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 206}{2}} = \sqrt[3]{309} = 6{,}76 \text{ см}; \qquad h = 2b = 2 \cdot 6{,}76 = 13{,}52 \text{ см};$$

$$A = bh = 6{,}76 \cdot 13{,}52 = 91{,}40 \text{ см}^2.$$

Круглое поперечное сечение:

$$W_x = 0{,}1\, d^3;\ \ 206 = 0{,}1\, d^3;\ \ d = \sqrt[3]{\frac{206}{0{,}1}} = \sqrt[3]{2060} = 12{,}72 \text{ см};$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 127 \text{ см}^2.$$

Наиболее рациональным является двутавровое сечение, так как имеет меньшую площадь поперечного сечения по сравнению с остальными типами сечений.

3. Нормальные напряжения вычисляем по формуле Навье $\sigma = \dfrac{M\,y}{I_x}$.

В опасном сечении $|M_{max}| = 33{,}05$ кНм, $Q = -31$ кН.

Данные для двутавра № 20а: $h = 200$ мм; $b = 110$ мм; $d = 5{,}2$ мм; $t = 8{,}3$ мм; $A = 28{,}3$ *см*^{2}; $I_x = 1970$ см^4; $S_x = 111$ см^3.

Обозначим характерные точки по высоте сечения (рис. 3.22).

Точка 1:

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ мм} = 0{,}1 \text{ м};$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{M_{\max}\, y_1}{I_x} = \frac{33{,}05 \cdot 0{,}1}{1970 \cdot 10^{-8}} = 168 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 168 \text{ МПа}.$$

Так как изгибающий момент отрицательный, то точки 1 и 2 лежат в растянутой зоне и напряжение в этих точках имеет положительный знак.

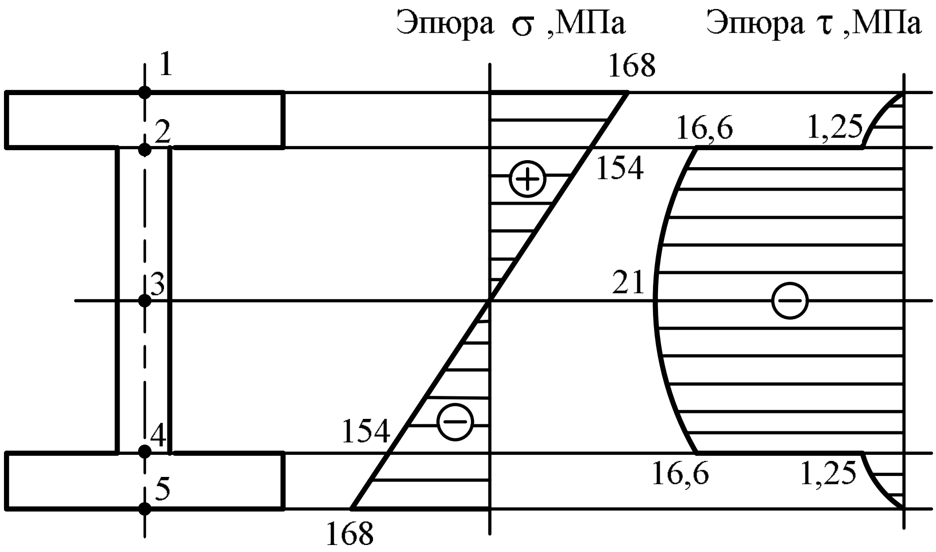

Рис. 3.22

Точка 2:

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{200}{2} - 8{,}3 = 91{,}7 \text{ мм} = 0{,}0917 \text{ м};$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{M_{\max}\, y_2}{I_x} = \frac{33{,}05 \cdot 0{,}0917}{1970 \cdot 10^{-8}} = 154 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 154 \text{ МПа}.$$

Точка 3

$\sigma^{(3)} = 0$, так как $y_3 = 0$. Ось, проходящая через точку 3, называется *нейтральной линией.*

Точки 4 и 5. В этих точках значения нормальных напряжений те же, что и в точках 2 и 1, только отрицательные, так как точки 4 и 5 лежат в сжатой зоне.

$$\sigma^{(4)} = -154 \text{ МПа}; \qquad \sigma^{(5)} = -168 \text{ МПа}.$$

4. Касательные напряжения τ вычисляем по формуле

$$\tau = \frac{Q\, S_x}{b\, I_x}.$$

В точках 1 и 5 $\tau = 0$.

В точках 2 и 4 τ изменяются скачкообразно, за счет изменения ширины волокна, проходящего через точку 2. График в этих точках носит несколько условный характер, так как резкое изменение ширины сечения вызывает местное распределение напряжений. Знак касательных напряжений тот же, что и поперечной силы Q.

Точки 2, 4. Вычисляем статический момент площади поперечного сечения

$$S_x^* = A_x^* \, y_c^* ,$$

где A_x^* – отсеченная часть площади поперечного сечения; y_c^* – координата центра тяжести отсеченной площади.

$$S_x^* = bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 0{,}11 \cdot 0{,}0083\left(\frac{0{,}2}{2} - \frac{0{,}0083}{2}\right) = 87{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

При b = 110 мм

$$\tau' = \frac{Q_{\max} S_x^*}{I_x b} = \frac{-31 \cdot 87{,}5 \cdot 10^{-6}}{1970 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}11} = 1{,}250 \cdot 10^3\ \text{кН/м}^2 = 1{,}25\ \text{МПа}.$$

При $b = t$ = 8,3 мм

$$\tau'' = \frac{Q_{\max} S_x^*}{I_x b} = \frac{-31 \cdot 87{,}5 \cdot 10^{-6}}{1970 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}0083} = -16{,}6 \cdot 10^3\ \text{кН/м}^2 = -16{,}6\ \text{МПа}.$$

Точка 3. $S_x^* = 111\ \text{см}^3$ – берется из справочника.

$$\tau = \frac{-31 \cdot 111 \cdot 10^{-6}}{1970 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}0083} = -21 \cdot 10^3\ \text{кН/м}^2 = -21\ \text{МПа}.$$

Строим эпюры напряжений (рис. 3.22).

Максимальное касательное напряжение имеет место на нейтральной линии, т. е. $\tau_{\max} = 21$ МПа.

Допускаемое касательное напряжение по 3-й теории прочности принимаем равным $[\tau] = 0{,}6[\sigma]$, т. е. $[\tau]$ = 96 МПа.

Следовательно, для балки двутаврового сечения

$$\tau_{\max} = 21\ \text{МПа} < 96\ \text{МПа} = [\tau].$$

Условие прочности выполняется.

II. Для балки, работающей на изгиб (рис. 3.19, *б*), требуется:

1. определить опорные реакции;
2. построить эпюры внутренних силовых факторов – поперечной силы Q и изгибающего момента M;
3. подобрать размеры двутаврового поперечного сечения стальной балки.

4. построить эпюру прогибов балки и проверить балку по условию жесткости.

Дано:

1. допускаемые напряжения для стали: [σ] = 180 МПа; [τ] = 110 МПа;
2. F = 40 кН; q = 18 кН/м; M = 20 кНм;
3. l_1 = 0,5 м; l_2 = 1,2 м; l_3 =0,8 м.

Решение: 1. Определяем опорные реакции, используя вторую форму условий равновесия:

$$\Sigma F_z = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\Sigma m_A = 0; \quad -F_1 l_1 - M + F_2(l_1 + l_2) + R_B(l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 l_1 + M - F_2(l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{40 \cdot 0{,}5 + 20 - 30 \cdot 1{,}7}{2{,}5} = -4{,}4 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_B = 0; \quad -M - F_2 l_3 + F_1(l_2 + l_3) - R_A(l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$R_A = \frac{-M - F_2 l_3 + F_1(l_2 + l_3)}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{-20 - 30 \cdot 0{,}8 + 40 \cdot 2}{2{,}5} = 14{,}4 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение $\Sigma F_y = 0$.

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A - F_1 + F_2 + R_B = 14{,}4 - 40 + 30 - 4{,}4 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

2. Для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M воспользуемся методом сечений.

Участок 1, $0 \le z_1 \le l_1$:

$$Q = R_A = 14{,}4 \text{ кН};$$

$$M = R_A z_1; \quad M_{z_1=0} = 0; \quad M_{z_1=l_1} = R_A l_1 = 14{,}4 \cdot 0{,}5 = 7{,}2 \text{ кНм}.$$

Участок 2, $0 \le z_2 \le l_2$:

$$Q = R_A - F_1 = 14{,}4 - 40 = -25{,}6 \text{ кН};$$

$$M = R_A(l_1 + z_2) - F_1 z_2; \quad M_{z_2=0} = R_A l_1 = 7{,}2 \text{ кНм};$$

$$M_{z_2=l_2} = R_A(l_1 + l_2) - F_1 l_2 = 14{,}4 \cdot 1{,}7 - 40 \cdot 1{,}2 = -23{,}52 \text{ кНм}.$$

Участок 3, $0 \le z_3 \le l_3$:

$$Q = -R_B = -(-4{,}4) = 4{,}4 \text{ кН};$$

$$M = R_B z_3; \ \ M_{z_3=0} = 0; \ \ M_{z_3=l_3} = R_B l_3 = -4{,}4 \cdot 0{,}8 = -3{,}52 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M в масштабе (рис. 3.23).

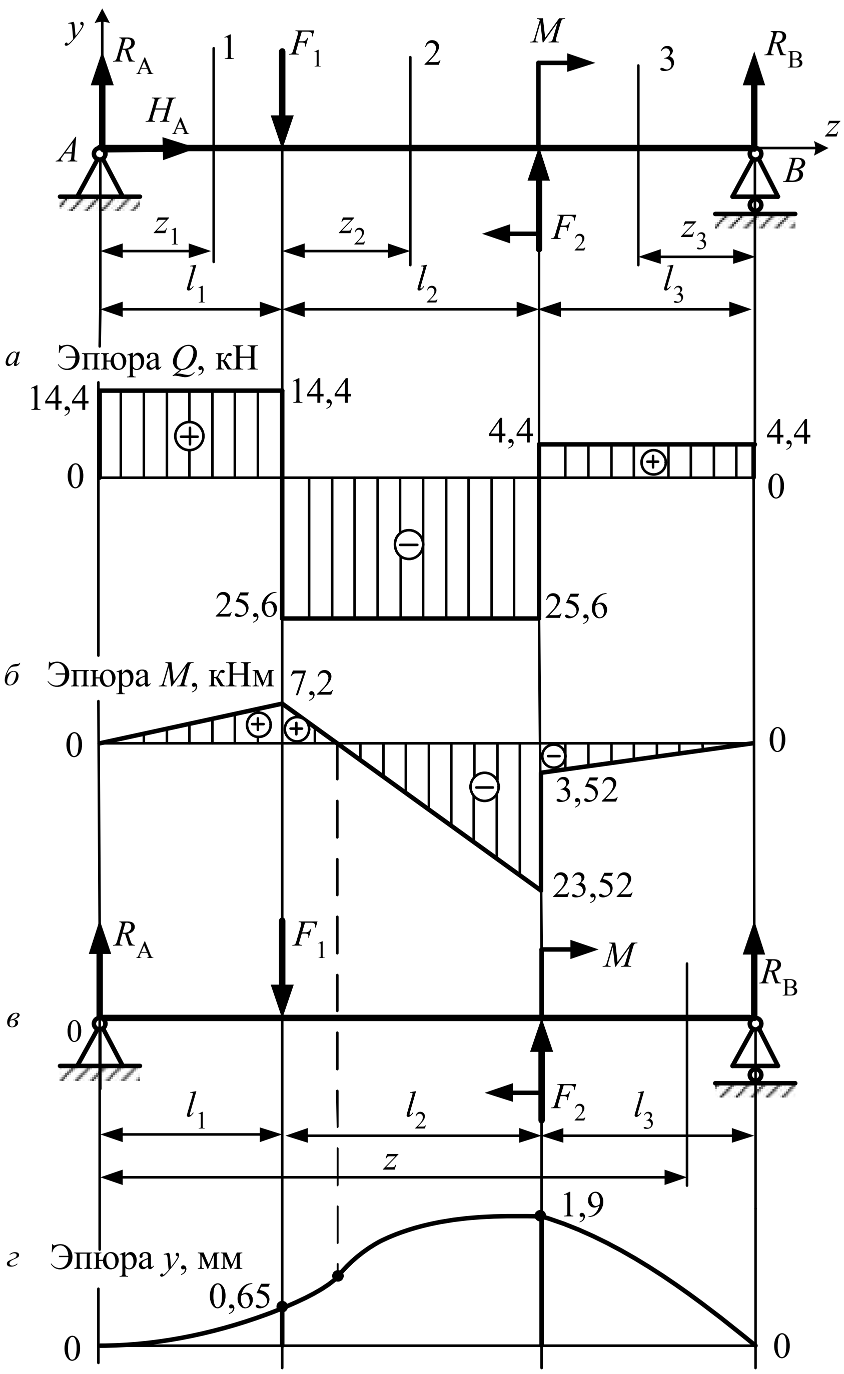

Рис. 3.23

3. Подбираем двутавровое поперечное сечение из условия прочности при изгибе.

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}; \quad |M_{\max}| = -23{,}52 \text{ кНм}.$$

$$W_x = \frac{23{,}52}{160 \cdot 10^3} = 0{,}147 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 147 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента прокатной стали выбираем двутавр № 18, для которого $W_x = 143 \text{ см}^3$; $I_x = 1290 \text{ см}^3$; $A = 23{,}4 \text{ см}^2$. Так как у выбранного момента сопротивления момент инерции меньше расчетного, то необходимо вычислить напряжение при $W_x = 143 \text{ см}^3$ и сравнить с допускаемым напряжением. Перенапряжение допускается до 5 %.

$\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_x} = \dfrac{23{,}52}{143 \cdot 10^{-6}} = 164{,}5 \text{ кНм}$, перенапряжение составило 2,8 %, что допустимо.

4. Вычисляем прогибы балки y и углы поворота θ в характерных точках балки.

Допускаемые значения прогибов принять:

$$[y] = \frac{1}{1000} \cdot l \ \text{– для двухопорных,}$$

где l – длина пролета.

Запишем универсальное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (3.36). Начало координат выбираем на левом конце балки (рис. 3.23, *в*). Уравнение изгибающего момента составляем для крайнего правого сечения, используя специальные приемы (см. п. 3.1.2).

$$E\,I\,y'' = R_A z - F_1(z - l_1) + F_2(z - l_1 - l_2) + M(z - l_1 - l_2)^0;$$

$$E\,I\,y' = \frac{R_A z^2}{2} - \frac{F_1(z - l_1)^2}{2} + \frac{F_2(z - l_1 - l_2)^2}{2} + M(z - l_1 - l_2) + C;$$

$$E\,I\,y = \frac{R_A z^3}{6} - \frac{F_1(z - l_1)^3}{6} + \frac{F_2(z - l_1 - l_2)^3}{24} + \frac{M(z - l_1 - l_2)^2}{2} + C z + D.$$

Для определения прогибов y используется третье уравнение.

Произвольные постоянные определяем из условий закрепления балки:

1) $z = 0$; $y = 0$. Подставляем эти значения в третье уравнение и получаем $D = 0$;

2) $z = (l_1 + l_2 + l_3) = 3$ м; $y = 0$. Подставляем в третье уравнение:

$$0 = \frac{14{,}4 \cdot 2{,}5^3}{6} - \frac{40 \cdot 2^3}{6} + \frac{30 \cdot 0{,}8^3}{6} - \frac{20 \cdot 0{,}8^2}{2} + C \cdot 2{,}5;$$

$$C = 2{,}75 \text{ кНм}^2.$$

Далее определяем прогибы в характерных точках, используя третье уравнение:

а) $z = l_1 = 0{,}5$ м:

$$EIy = \frac{R_A l_1^3}{6} + Cl_1 = \frac{14{,}4 \cdot 0{,}5^3}{6} + 2{,}75 \cdot 0{,}5 = 1{,}675 \text{ кНм}^3;$$

$$y = \frac{1{,}675}{2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 6{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}65 \text{ мм}.$$

б) $z = (l_1 + l_2) = 1{,}7$ м:

$$EIy = \frac{R_A \cdot 1{,}7^3}{6} - \frac{F_1 (1{,}7 - 0{,}5)^3}{6} + C \cdot 1{,}7 =$$

$$= \frac{14{,}4 \cdot 1{,}7^3}{6} - \frac{40 \cdot 1{,}2^3}{6} + 2{,}75 \cdot 1{,}7 = 4{,}945 \text{ кНм}^2.$$

$$y = \frac{4{,}945}{2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1{,}9 \text{ мм}.$$

Строим эпюру y в масштабе (рис. 3.23, *г*). Если изгибающий момент M на участке больше нуля ($M > 0$), то кривая y выпуклостью вниз. Если $M < 0$, то кривая y выпуклостью вверх.

5. Проверяем балку по условию жесткости:

$$y_{\max} \le [y];$$

$$[y] = 0{,}001 l = 0{,}001 \cdot 2{,}5 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

$$y_{\max} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \, м < [y] = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Вывод: условие жесткости выполняется.

Пример решения задачи № 10

Для вала, работающего на кручение (рис. 3.24), требуется:

1) построить эпюру крутящих моментов M_z;

2) из условия прочности вычислить диаметр опасного сечения вала;

3) определить касательные напряжения на всех участках вала и построить эпюру напряжений;

4) построить эпюру углов закручивания φ.

Дано:

1) допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 50$ МПа;

2) длины участков $l_1 = 0{,}6$ м; $l_2 = 0{,}6$ м; $l_3 = 0{,}5$ м;

3) крутящие моменты $T_1 = 10$ кНм; $T_2 = 20$ кНм.

Решение. 1. Разбиваем вал на участки, начиная с незакрепленного конца. Границами участков являются сечения с сосредоточенными крутящими моментами.

Для нахождения крутящих моментов применим метод сечений на каждом из участков. В пределах каждого участка проводим нормальное сечение на расстоянии z от границы с предыдущим. Мысленно отбрасываем левую часть вала, оставшуюся уравновешиваем.

Участок1, $0 \le z_1 \le l_1$:

$$M_z = T_1 = 10 \text{ кНм.}$$

Участок 2, $0 \le z_2 \le l_2$:

$$M_z = T_1 - T_2 = 10 - 20 = -10 \text{ кНм.}$$

Участок 3, $0 \le z_3 \le l_3$:

$$M_z = T_1 - T_2 - T_1 = 10 - 20 - 10 = -20 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру крутящих моментов M_z (рис. 3.24, *а*).

2. Определяем диаметр вала в опасном сечении из условия прочности при кручении.

Опасное сечение находится там, где действует наибольший крутящий момент $M_{z_{\max}} = |-20|$ кНм.

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_z}{0{,}2\ [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 50}} = 126 \text{ мм.}$$

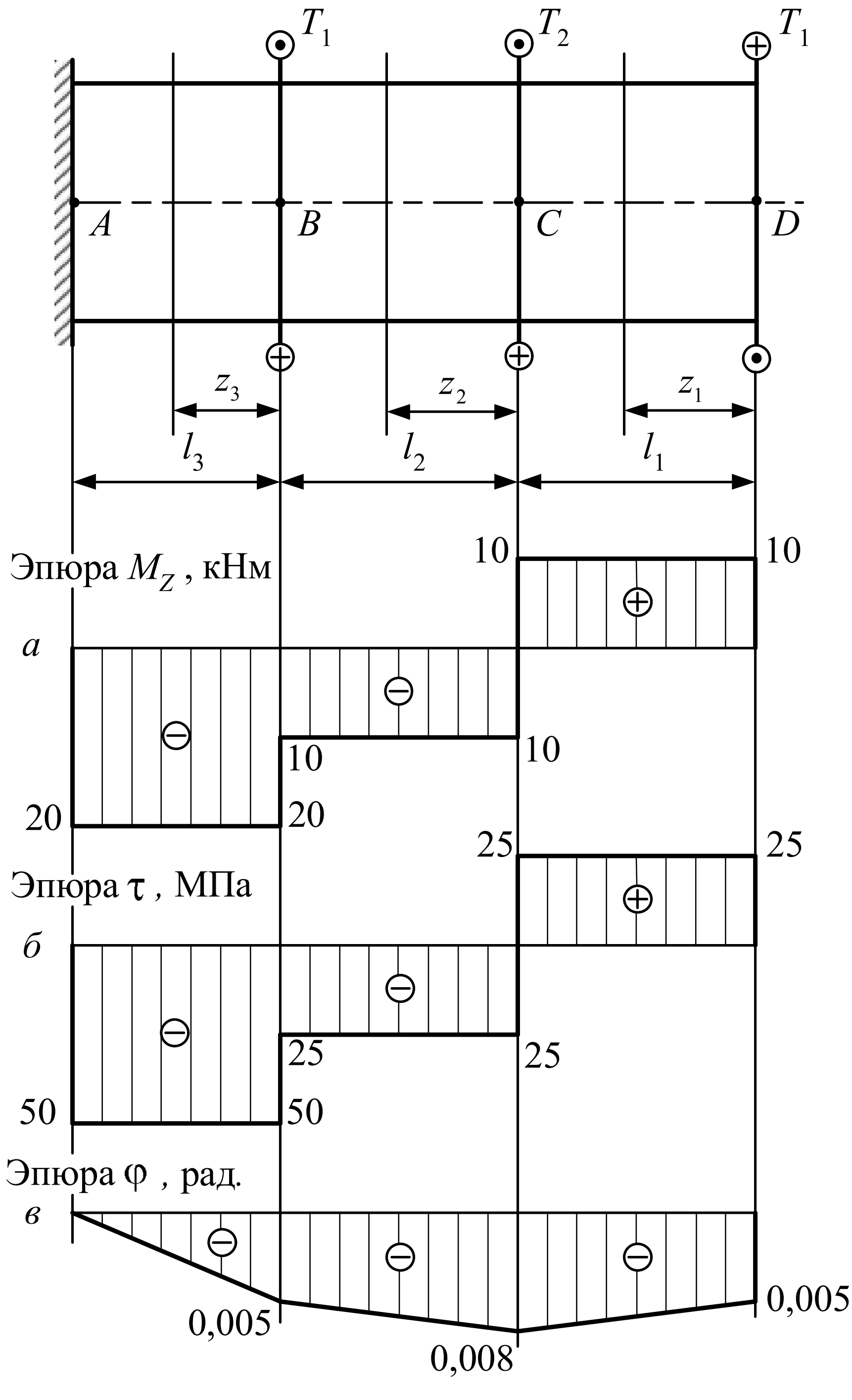

Рис. 3.24

3. Определяем касательные напряжения на каждом участке:

$$\tau_{(1)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0{,}2\ d^3} = \frac{10 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 126^3} = 25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(2)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0{,}2\ d^3} = \frac{-10 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 126^3} = -25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(3)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0{,}2\ \ d^3} = \frac{-20 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 126^3} = -50 \ \text{МПа}.$$

Строим эпюру касательных напряжений τ (рис. 3.24, *б*).

4. Определяем углы закручивания сечений вала. При этом рассматриваем вал с закрепленного конца. Проставляем характерные точки границ участков $A, B, C, Д$.

В точке A угол поворота равен нулю;

$$\varphi_A = 0.$$

В точке B

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi_{AB} = \varphi_A + \frac{M_z l_3}{G\ I_p} = 0 + \frac{-20 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 126^4} = -0{,}005 \ \text{рад}.$$

В точке C

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = \varphi_B + \frac{M_z I_2}{G\ I_p} = -0{,}005 + \frac{-10 \cdot 10^6 \cdot 0{,}6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 126^4} = -0{,}008 \ \text{рад}.$$

В точке $Д$

$$\varphi_Д = \varphi_C + \Delta\varphi_{CД} = \varphi_C + \frac{M_z I_1}{G\ I_p} = -0{,}008 + \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0{,}6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 126^4} = -0{,}005 \ \text{рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания φ (рис. 3.24, *в*).

5. Проверяем вал по условию жесткости $\theta_{\max} \le [\theta]$:

$$|\theta_{\max}| = \frac{M_{z\ \max}}{G\ I_p} = \frac{20 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 126^4} = 1 \cdot 10^{-5} \,\text{рад/м}.$$

Допускаемый угол поворота принимается конструктивно. В машиностроении в большинстве случаев принимается [θ] = 0,01 рад на один метр длины вала:

$$\theta_{\max} = 1 \cdot 10^{-5} \prec [\theta] = 0{,}01.$$

Вывод: условие жесткости выполняется.